Ədalət Kərim oğlu KƏRİMOV
Qərbi Kaspi Universiteti, İnformasiya Texnologiyaları və İdarəetmə fakültəsi, professor
E-mail: akarimov@gmail.com

Sevgi Malik qızı BABAYEVA
Qərbi Kaspi Universiteti, İdarəetmədə İnformasiya Sistemləri, İnformasiya Texnologiyaları Və İdarəetmə fakültəsi, magistr
E-mail: babayeva.meleyke1@gmail.com

DALĞA PROSESLƏRİNİN BƏZİ RİYAZİ MODELLƏRİ VƏ MAPLE PROQRAMINDA REALİZASİYASI

Xülasə: Bu məqalədə dalğa proseslərinin bəzi riyazi metodlar ilə həll edilməsinə, eyni zamanda bir neçə nümunə əsasında Maple proqramında yazılış qaydasına diqqət yönəldilmişdir. Furye, Dalamber üsullarından istifadə etməklə dalğa proseslərinin həllinə toxunulmuşdur.
Riyazi fizikanın praktikada geniş sahələrdə tətbiq olunan əsas başlanğıc və sərhəd məsələlərinin proqram təminatı müasir dövrümüzdə aktual məsələlərdəndir. Təqdim olunan məqalədə dalğa tənliyi üçün bir neçə Koşi və sərhəd məsələlərinin Maple riyazi sistemində həlli realizə edilmişdir.
Eyni zamanda, sistem geniş funksiyalar dəstinə malikdir və hesablama onun uğurla tətbiq oluna bilməsini daim dəstəkləyir. Təkcə riyaziyyat fənni ilə bağlı problemlər deyil, eyni zamanda mühəndislik, coğrafiya kimi müxtəlif fənn problemlərini də tələbələr bu proqram vasitəsi ilə həll edə bilərlər.
Açar sözlər: Maple proqramı, Koşi şərti, Furye üsulu, Dalamber üsulu, Hiperbolik tip tənlik, sərhəd məsələləri.

UOT: 51-7
DOI: doi.org/10.54414/bsnx5821

Dalğa tənliyi üçün sərhəd məsələləri. Furye üsulu

Fiziki proseslərin riyazi modelini qurarkən prosesin birqiymətli olması hər zaman təmin olunmalıdır. Bunun üçün məsələyə öyrənilən prosesin fiziki mahiyyətindən irəli gələn müəyyən şərtlər qoyulmalıdır. [3]

Fərz edək ki, ucları bərkidilmiş $0 \le x \le l$ simin eninə rəqsləri öyrənilir. Onda simin hər bir nöqtəsinin şaquli yerdəyişməsini ifadə edən $u(x,t)$ funksiyası

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 \qquad (1)$$

sərhəd şərtləri adlanan şərtləri ödəməlidir. Digər tərəfdən baxdıqda isə, rəqs prosesi simin başlanğıc anda olan formasından və hər bir nöqtəsinin sürətindən asılı olaraq dəyişir. Deməli, $u(x,t)$ funksiyası müəyyən bir

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x) \qquad (2)$$

başlanğıc şərtlərini də ödəməlidir. Eyni zamanda da, $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ $t=0$ anında simin hər bir nöqtəsinin vəziyyətini təyin edən verilmiş müəyyən funksiyalardır. [2]

Əgər simin ucları bərkidilməyibsə, müəyyən bir qanunla hərəkət edirsə, o zaman $u(x,t)$ funksiyası üçün (1) sərhəd şərti əvəzinə daha ümumi olan

$$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t) \qquad (3)$$

şərtləri verilməlidir, burada $\mu_1(t)$ və $\mu_2(t)$ hər bir t anında simin $x=0$ və $x=l$ uc nöqtələrinin $t=0$ başlanğıc vəziyyətinə nəzərən yerdəyişməsini ifadə edən verilmiş funksiyalar hesab olunur.

Sərhəd şərtləri və onun başlanğıc şərtləri birlikdə, baxılan tənliklər üçün sərhəd məsələləri adlanacaq. [4]

Beləliklə, dalğa tənliyi üçün qeyd edilən sərhəd məsələsini belə ifadə etmək olar:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad 0<x<l, \; t>0 \qquad (4)$$

tənliyinin elə $u(x,t)$ həllinin tapılması tələbi qoyulur ki,

$$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t), \quad t>0 \qquad (5)$$

sərhəd şərtlərini və eyni zamanda

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad 0<x<l \qquad (6)$$

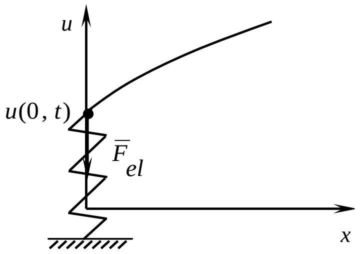
başlanğıc şərtlərini ödəmiş olsun.

(4), (5) və (6) sərhəd məsələsinə dalğa tənliyi üçün birinci növ sərhəd məsələsi deyilir.

Dalğa tənliyi üçün digər növ sərhəd

məsələlərinin fiziki mahiyyətlərini dərindən araşdırmadan onu da qeyd edək ki,

Əgər simin hər hansı bir ucuna, məsələn, $x=0$ ucuna məlum xarici $\nu_1(t)$ qüvvəsi təsir edirsə (bu $\nu(t)=0$ da ola bilər, yəni qüvvə təsir etməyə də bilər), onda simin bu ucunda sərhəd şərti



Şək. 1.

$$u_x(0,t)=\nu_1(t) \qquad (7)$$

şəklini alacaqdır. Bu sərhəd şərtinə isə II növ sərhəd şərti deyəcəyik.

Əgər, məsələn, $x=0$ ucu elastik bərkidilmişsə (şək. 1), onda məlum olan Huk qanununa görə sərhəd şərtləri

$$u_x(0,t)=h\,u(0,t) \qquad (8)$$

şəklində verilməlidir. Burada qeyd edilən $h>0$ mütənasiblik əmsalıdır (qeyd edək ki, $x=l$ ucu elastik bərkidilmişsə, o zaman $u_x(l,t)=-hu(l,t)$ olacaqdır). Əgər elastik bərkidilmiş $x=0$ ucu müəyyən $\theta(t)$ qanunu ilə də eyni zamanda yerdəyişməyə məruz qalırsa, o zaman deyə biləri ki, (8) əvəzinə daha ümumi olan

$$u_x(0,t)=h[u(0,t)-\theta(t)] \qquad (9)$$

($x=l$ ucunda $u_x(l,t)=-h[u(l,t)-\theta(t)]$) şərti mütləq qoyulmalıdır.

Beləliklə, simin hər hansı bir, məsələn, $x=0$ uc nöqtəsində üç növ sərhəd şərtləri də verilə bilər:

I növ $u(0,t)=\mu_1(t)$ - verilmiş seçim;

II növ $u_x(0,t)=\nu_1(t)$ - verilmiş qüvvə;

III növ $u_x(0,t)=h[u(0,t)-\theta(t)]$ - elastik bərkidilmədir.

Eyni qayda ilə $x=l$ ucunda da 3 növ sərhəd şərtləri qoyula bilər.

Müxtəlif növ sərhəd şərtlərinin kombinasiyasından simin rəqs tənliyi üçün müxtəlif 6 növ sərhəd məsələsi qoymaq da mümkündür. Məsələn, simin $x=0$ ucunda I növ, $x=l$ ucunda II növ sərhəd şərti verilmişsə, onda dalğa tənliyi üçün sərhəd şərtləri

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u_x(l,t)=\nu_2(t)$$

şəklini alacaqdır.

Əgər simin rəqsi hərəkəti çox kiçik zaman müddətində öyrəniləcəksə, onda onun uc nöqtələrində verilmiş seçimin təsiri qeyd edilməyəcək dərəcədə kiçik olacaqdır. Bu halda simə sonsuz uzun sim kimi baxıb Koşi məsələsini aşağıdakı kimi də qoymaq olar:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad -\infty<x<+\infty,\ t>0,$$

Bu zaman yuxarıda verilən tənliyin elə həllini tapmaq bizdən tələb olunur ki,

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad u_t(x,0)=\psi(x),\qquad -\infty<x<+\infty$$

başlanğıc şərtlərini ödəmiş olsun.

Əgər simin rəqs hərəkəti bir uc nöqtəsinin yaxınlığında öyrənilirsə, onda digər uc nöqtəsindəki sərhəd seçiminin təsiri qeydə alınmayacaq qədər çox kiçik olacaqdır. Bu halda simə bir tərəfi sonsuz uzun sim kimi baxıb sərhəd məsələsini bu qaydada da ifadə etmək mümkün olacaqdır:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<+\infty,\quad t>0,\\ u(0,t)=\mu(t), & t\ge 0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x<+\infty \end{cases}$$

Dalğa proseslərinin xarakterləri isə elədir ki, uzun vaxt müddəti keçdikdən sonra sürtünmə nəticəsində başlanğıc şərtlərin təsiri o qədər zəifləmiş olur ki, onu nəzərə almamaq da olar. Onda sərhəd məsələləri belə qoyulmuş olacaq:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,\\ u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t), & t\ge 0. \end{cases}$$

Belə məsələlər başlanğıc şərtləri olmayan məsələlər adlanır.

Superpozisiya prinsipi. Ümumi məsələnin reduksiyası.

İndi isə, tutaq ki,

$u^{(1)}(x,t),\ u^{(2)}(x,t),\ u^{(3)}(x,t)$ və $u^{(4)}(x,t)$ funksiyaları

$$\begin{cases} u_{tt}^{(i)} = a^2 u_{xx}^{(i)} + f^{(i)}(x,t), \\ u^{(i)}(0,t) = \mu_1^{(i)}(t), \quad u^{(i)}(l,t) = \mu_2^{(i)}(t), \\ u^{(i)}(x,0) = \varphi^{(i)}(x), \quad u_t^{(i)}(x,0) = \psi^{(i)}(t), \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Verilən sərhəd məsələlərinin həllidir. O zaman aydındır ki,

$$u(x,t) = u^{(1)}(x,t) + u^{(2)}(x,t) + u^{(3)}(x,t) + u^{(4)}(x,t) = \sum_{i=1}^{4} u^{(i)}(x,t) \tag{10}$$

funksiyası

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

sərhəd məsələsinin həlli olacaqdır. Burada isə

$$f(x,t) = \sum_{i=1}^{4} f^{(i)}(x,t),$$

$$\mu_1(t) = \sum_{i=1}^{4} \mu_1^{(i)}(t), \qquad \mu_2(t) = \sum_{i=1}^{4} \mu_2^{(i)}(t),$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{4} \varphi^{(i)}(x), \qquad \psi(x) = \sum_{i=1}^{4} \psi^{i}(x).$$

Verilən bu prinsip isə superpozisiya prinsipi adlanır və əlavə şərtləri xətt olan istənilən xətti tənliklər üçün də doğrudur.

Deməli, (11) ümumi sərhəd məsələsinin həllini aşağıdakı kimi göstərmək olar:

$$\begin{cases} u_{tt}^{(1)} = a^2 u_{xx}^{(1)}, \\ u^{(1)}(0,t) = 0, \qquad u_x^{(1)}(l,t) = 0, \\ u^{(1)}(x,0) = \varphi(x), \quad u_t^{(1)}(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}^{(2)} = a^2 u_{xx}^{(2)}, \\ u^{(2)}(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x^{(2)}(l,t) = 0, \\ u^{(2)}(x,0) = 0, \qquad u_t^{(2)}(x,0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}^{(3)} = a^2 u_{xx}^{(3)}, \\ u^{(3)}(0,t) = 0, \qquad u_x^{(3)}(l,t) = \mu_2(t), \\ u^{(3)}(x,0) = 0, \qquad u_t^{(3)}(x,0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}^{(4)} = a^2 u_{xx}^{(4)}, \\ u^{(3)}(0,t) = 0, \qquad u_x^{(3)}(l,t) = \mu_2(t), \\ u^{(3)}(x,0) = 0, \qquad u_t^{(3)}(x,0) = 0, \end{cases}$$

Biz xüsusi sərhəd məsələlərini (10) cəm şəklində də ifadə edə bilərik.

Simin məcburi rəqslərinin tənliyi

Dəyişənlərinə ayrılma üsulunu qeyri-bircins hiperbolik tənlik üçün

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, & (1) \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0, & (2) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l & (3) \end{cases}$$

Verilən sərhəd məsələlərinə də tətbiq etmək mümkündür.

Simin sərbəst rəqslərinin həllini qurmaq üçün verilən t dəyişəninə parametr kimi baxıb (1)-(3) məsələsinin $u(x,t)$ həllini tapdığımız $\{\sin \sqrt{\lambda_n} n\}_{n=1}^{\infty}$ tənliyi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \sqrt{\lambda_n} x \tag{4}$$

Furye sırası şəklində axtaraq. Bu zaman, $u_n(t)$ funksiyaları elə təyin olunmalıdır ki, (4) sırası (1) tənliyini və (3) başlanğıc şərtlərini ödəsin (yuxarıda verilən misallarla bizə artıq (2) sərhəd şərtlərinin ödənilməsi aydındır) [1, səh. 42-43].

Nəticə

Riyazi fizikanın praktikada geniş sahələrdə tətbiq olunan əsas başlanğıc və sərhəd məsələlərinin proqram təminatı müasir dövrümüzdə aktual məsələlərdəndir. Təqdim olunan dissertasiya işində dalğa tənliyi üçün bir neçə Koşi və sərhəd məsələlərinin Maple riyazi sistemində həlli realizə edilmişdir.

Maple müxtəlif tədqiqatlarda, riyazi metodlar, onları adi riyazi hesablamalardan azad etmək və tədqiq olunan metodun mahiyyətinə diqqət yetirilməsində əvəzsiz köməkçidir.

Maple sistemi, şübhəsiz ki, sistemlər arasında aparıcı yerlərdən birini tutur, kompüter cəbri və ya necə deyərlər, simvolik və ya analitik riyazi tədqiqatları hesablayır və istifadəçini rahat və ağıllı mühitlə təmin edir.

Maple sistemini öyrənmək olduqca asandır, çünki istifadəsi asandır.

Sadə hesablamalar və ya riyaziyyatı mənimsəmək üçün hətta məktəblilər belə Maple proqramından istifadə edə, yeni kodlar yazmaqla proqramı daha dərindən mənimsəyə bilərlər.

ƏDƏBİYYAT SİYAHISI:

1. Əzizov A., Məmmədova Ü. Riyazi-fizikanın metdoları. Bakı. 2015.
2. https://www.wiki.az-az.nina.az/N%C9%99z%C9%99ri_fizika.html
3. https://unec.edu.az/application/uploads/2015/01/fizika2211.pdf
4. https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=ProgrammingGuide%2FChapter01

Adalat Karim KARIMOV
Western Caspian University,
Faculty of Information Technologies and Management, Professor
E-mail: Akarimov@gmail.com

Sevgi Malik BABAYEVA
Western Caspian University,
Faculty of Management Information Systems,
Information Technologies and Management, Master's degree
E-mail: babayeva.meleyke1@gmail.com

MATHEMATICAL MODELS OF WAVE PROCESSES AND IMPLEMENTATION IN MAPLE SOFTWARE

Sammary: This article deals with the solution of wave processes by some mathematical methods, and at the same time, writing order in the Maple program on the basis of several examples. The solution of wave processes using Fourier and Dalamber methods is considered.
The software of basic initial and boundary problems of mathematical physics, which are applied in wide fields of practice, is one of the urgent issues in our modern times. In the presented article, the solution of several Cauchy and boundary value problems for the wave equation was realized in the Maple mathematical system. At the same time, the system has a wide set of functions, and the calculation constantly supports its successful application. Students can solve not only problems related to mathematics, but also problems of various subjects such as engineering and geography with the help of this program.
Key words: Maple program, Cauchy condition, Fourier method, Dalamber method, Hyperbolic type equation, boundary problems.

Адалат Керим оглы КЕРИМОВ
Западно-Каспийский университет,
факультет информационных технологий и менеджмента, профессор
E-mail: akarimov@gmail.com

Севги Малик кызы БАБАЕВА
Западно-Каспийский университет,
Информационные системы управления,
Факультет информационных технологий и менеджмента, магистрант
E-mail: babayeva.meleyke1@gmail.com

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ И РЕАЛИЗАЦИЯ В ПРОГРАММЕ MAPLE

Резюме: В данной статье внимание сосредоточено на решении волновых процессов некоторыми математическими методами, а заодно, на нескольких примерах, на порядке записи в программе Maple. Рассмотрено решение волновых процессов методами Фурье и Даламбера.
Программное обеспечение основных начальных и краевых задач математической физики, которые применяются в широких областях практики, является одной из актуальных проблем современности. В представленной статье решение нескольких задач Коши и краевых задач для волнового уравнения реализовано в математической системе Maple.
При этом система имеет широкий набор функций, а расчет постоянно поддерживает ее успешное применение. С помощью этой программы учащиеся могут решать не только задачи, связанные с математикой, но и задачи по различным предметам, таким как инженерия и география.
Ключевые слова: программа Maple, условие Коши, метод Фурье, метод Даламбера, уравнение гиперболического типа, краевые задачи.
Daxil olub: 12.03.2022